

水锤数值计算的全特性曲线法*

郑 铭 陈 池 袁寿其

【摘要】 采用麦切尔提出的无因次全特性曲线变换图形,按照弹性水柱理论提供的瞬变流基本方程,以及泵系统边界条件与初始条件,利用牛顿-莱福森法直接在计算机上进行水锤的数值计算。通过对几种常见的泵系统工况的计算结果和传统的图解法所得结果进行比较,表明本文方法速度快,更方便于工程设计计算。

叙词: 水锤 数值计算 全特性曲线 水泵

中图分类号: O 39. 1; O 39. 2

文献标识码: A

Full Characteristic Curve Method for Numerical Calculation of Water Hammer

Zheng Ming Chen Chi Yuan Shouqi

(Jiangsu University of Science and Technology)

Abstract

Water hammer was directly calculated by Newton-Raphson method by adopting Marchal's non-dimensional full characteristic curve based on the basic equations of the transient flow, which were derived from the elastic water column theory, as well as the boundary and initiation conditions. Compared with the results from the ordinary graphics method under several operations of common pumping systems, the results from the full characteristic curve method are faster to get and more precise.

Key words Water hammers, Numerical computation, Full characteristic curve, Pump

引言

传统的水锤计算采用图解法,虽有直观和简便等优点,但其精度取决于作图精度且需逐点绘图,计算工作量大,速度慢。随着计算机技术的发展,瞬变流理论的完善,人们试图采用计算机来解决水锤数值计算的问题。

文献[1~3]给出了泵的全特性曲线,它是将转速比为横坐标,流量比为纵坐标。这种曲线与泵的性能曲线画法一致,易被设计者与使用者接受。然而长期以来全特性曲线主要用于泵的选型。60年代中期,美国学者卡尔曼(Kamm an)提出了全特性曲线变换图形,即以相对转速 $r = n/n_R$ 为横坐标,相对流量 $Y = Q/Q_R$ 为纵坐标(下标 R 表示额定值),使全特性

曲线成为沿着 r 变化的一条曲线。此后麦切尔(Marchal)又提出了无因次全特性曲线(见图1),使曲线的物理意义更明确、更实用。新的无因次曲线横坐标 x 为 $\pi + \arctan(Y/r)$, 纵坐标 y_1, y_2 分别为 $h/(r^2 + Y^2)$ 、 $\beta/(r^2 + Y^2)$, 其中 $h = H/H_R$, $\beta = T/T_R$, H 为扬程, T 为转矩。

作者采用了麦切尔的变换图形,结合瞬变流的基本方程以及泵系统的边界条件与初始条件编制了水锤计算的计算机程序,对几种常见的水锤工况进行计算。

1 瞬变流基本方程及其变换

对有压管路中非稳定流动一维波动方程,可用连续性方程和运动(动量)方程来表示。按照弹性水

收稿日期: 1999-11-05

* 教育部留学回国人员研究基金资助项目

郑 铭 江苏理工大学生物与环境工程学院 教授, 212013 镇江市

陈 池 上海大学应用数学与力学研究所 博士生, 200072 上海市

袁寿其 江苏理工大学流体机械工程技术中心 教授 博士生导师

柱理论, 上述方程分别为

$$\frac{\partial H}{\partial t} + v \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \sin\alpha \right) + \frac{a^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{f}{D} \frac{v |v|}{2g} = 0 \quad (2)$$

式中 H —— 管路所求点的水头

D —— 压力管直径 f —— 管路摩擦因数

v —— 管内流体流动速度, 正向指向阀门

α —— 管路与水平线夹角

a —— 扰动波传播速度

x —— 位置坐标, 正向指向阀门

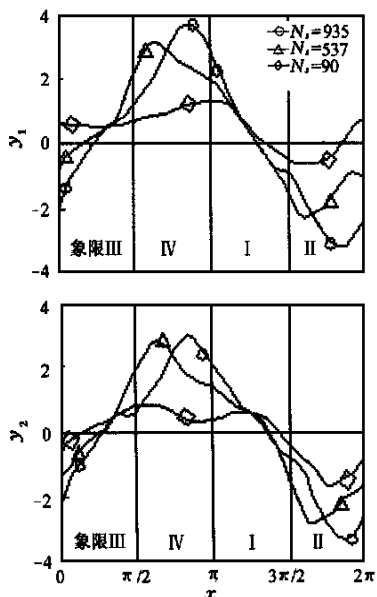


图1 麦切尔特性曲线

运用特性曲线法将式(1)、(2)转化为常微分方程组

方程组

$$C^+ \begin{cases} \frac{dH}{dt} + \frac{a}{g} \frac{dv}{dt} + v \sin\alpha + \frac{af}{2Dg} v |v| = 0 \\ \frac{dx}{dt} = v + a \end{cases}$$

$$C^- \begin{cases} \frac{dH}{dt} + \frac{a}{g} \frac{dv}{dt} + v \sin\alpha - \frac{af}{2Dg} v |v| = 0 \\ \frac{dx}{dt} = v - a \end{cases}$$

由图2的泵系统图, 可以假设 $a \gg v$, 并略去次要项 $v \sin\alpha$, 从而方程组可简化为

$$C^- \quad v_P = C_1 + C_2 H_P \quad (3)$$

$$C^+ \quad v_P = C_1 - C_2 H_P \quad (4)$$

$$C_1 = v_S - \frac{g}{a} H_S - \frac{f}{2D} v_S |v_S| \Delta t$$

$$C_2 = \frac{g}{a}$$

其中的下标 S 表示 S 点的物理量, P 为 P 点的物理量(见图2)。

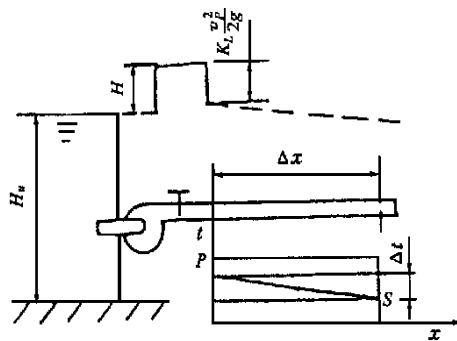


图2 泵系统图

2 边界条件方程式

2.1 泵的转矩方程

$$T = T_m - T = I \frac{d\omega}{dt} = \frac{WR^2}{g} \frac{d\omega}{dt}$$

式中 W —— 转动体重量 T_m —— 原动机转矩

T —— 泵的阻力矩 I —— 转动惯量

R —— 转动半径 ω —— 转动角速度

由于 $r = \frac{n}{n_R} = \frac{\omega}{\omega_R}$, 则

$$\frac{dr}{dt} = 2K_1(\beta_m - \beta) \quad (5)$$

$$K_1 = \frac{450 \rho g^2 Q_R H_R}{\pi^2 \eta_k W R^2 n_R^2}$$

式中 n_R —— 额定转速

η_k —— 泵额定效率, $\eta_k = \rho g^2 Q_R H_R / P_R$

对式(5)积分可得

$$\beta + \beta_0 = - (r - r_0) / (K_1 \Delta t) + \beta_m + \beta_0$$

其中的下标 m 表示原动机的物理量, 下标 0 表示初始值。

2.2 泵的特性曲线

$$\theta = \pi + \arctan \frac{y}{r}$$

扬程函数 $F_{ry}(\theta) = \frac{h}{r^2 + y^2}$

转矩函数 $G_{ry}(\theta) = \frac{\beta}{r^2 + y^2}$

2.3 泵和阀门处水头

由图2可知

$$\begin{cases} H_u + H - K_L \frac{v_P^2}{2g} = H_P & (v_P > 0) \\ H_u + H + K_L \frac{v_P^2}{2g} = H_P & (v_P < 0) \end{cases} \quad (6)$$

由式(3)得

$$H_P = (v_P - C_1) / C_2$$

且有

$$K_L = \frac{K_L \Delta}{T}$$

$$y = \frac{Q}{Q_R} = \frac{v_P A}{Q_R}$$

式中 A ——过流面积

K_{LO} ——阀门全开时阻力系数

τ ——阀门开度系数 H_u ——总扬程

$v_P > 0$ 时, 有

$$H_u + h_{H_R} - \frac{K_{LO} v_P^2}{\tau^2 2g} = \frac{v_P - C_1}{C_2}$$

经变换有

$$h = C_G \mathcal{Y}^2 + \frac{Q_R}{C_{2A} H_R} \mathcal{Y} - \frac{C_1}{C_2 H_R} - \frac{H_u}{H_R} \quad (7)$$

$$C_G = \frac{K_{LO} Q_R^2}{2g \tau^2 A^2 H_R}$$

同理, 当 $v_P < 0$ 时, 有

$$h = -C_G \mathcal{Y}^2 + \frac{Q_R}{C_{2A} H_R} \mathcal{Y} - \frac{C_1}{C_2 H_R} - \frac{H_u}{H_R}$$

令 $F_1 = (r^2 + \mathcal{Y}) F_{r\mathcal{Y}}(\Theta) - C_G \mathcal{Y}^2 -$

$$\frac{Q_R}{C_{2A} H_R} \mathcal{Y} + \frac{C_1}{C_2 H_R} + \frac{H_u}{H_R} \quad (v_P > 0) \quad (8)$$

$F_1 = (r^2 + \mathcal{Y}) F_{r\mathcal{Y}}(\Theta) + C_G \mathcal{Y}^2 -$

$$\frac{Q_R}{C_{2A} H_R} \mathcal{Y} + \frac{C_1}{C_2 H_R} + \frac{H_u}{H_R} \quad (v_P < 0) \quad (9)$$

$$F_2 = (r^2 + \mathcal{Y}) G_{r\mathcal{Y}}(\Theta) + \frac{r - r_0}{K_1 \Delta t} +$$

$$\beta_0 - \beta_n - \beta_{n0} \quad (10)$$

3 计算机编程公式推导

根据式(8)、(9)、(10), 利用牛顿-莱福森公式(Newton-Raphson)和拉格朗日插值公式(Lagrangian)可以进行计算机编程公式的推导。

由牛顿-莱福森法得

$$\frac{\partial F_1}{\partial \mathcal{Y}} \Delta \mathcal{Y} + \frac{\partial F_1}{\partial r} \Delta r = -F_1 \quad (11)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \mathcal{Y}} \Delta \mathcal{Y} + \frac{\partial F_2}{\partial r} \Delta r = -F_2 \quad (12)$$

将式(11)、(12)写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \mathcal{Y}} & \frac{\partial F_1}{\partial r} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \mathcal{Y}} & \frac{\partial F_2}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathcal{Y} \\ \Delta r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_1 \\ -F_2 \end{bmatrix}$$

解方程得

$$\Delta r = \frac{a_{21} F_1 - a_{11} F_2}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}$$

$$\Delta \mathcal{Y} = \frac{a_{12} F_2 - a_{22} F_1}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}$$

式中的常数分别为

$$a_{11} = \frac{\partial F_1}{\partial \mathcal{Y}} = r \frac{\partial G_{r\mathcal{Y}}}{\partial \Theta} + 2\mathcal{Y} F_{r\mathcal{Y}} - 2C_G - \frac{Q_R}{C_{2A} H_R}$$

$$a_{12} = \frac{\partial F_1}{\partial r} = -\mathcal{Y} \frac{\partial F_{r\mathcal{Y}}}{\partial \Theta} + 2r F_{r\mathcal{Y}}$$

$$a_{21} = \frac{\partial F_2}{\partial \mathcal{Y}} = r \frac{\partial G_{r\mathcal{Y}}}{\partial \Theta} + 2\mathcal{Y} G_{r\mathcal{Y}}$$

$$a_{22} = \frac{\partial F_2}{\partial r} = -\mathcal{Y} \frac{\partial G_{r\mathcal{Y}}}{\partial \Theta} + 2r G_{r\mathcal{Y}} + \frac{1}{K_1 \Delta t}$$

$\frac{\partial F_{r\mathcal{Y}}}{\partial \Theta}, \frac{\partial G_{r\mathcal{Y}}}{\partial \Theta}$ 可用拉格朗日插值公式求出(详见文献[2])。

目前, 全面性能曲线转换使用的牛顿-莱福森及拉格朗日公式均有成熟的计算机程序, 使用者可直接调用。

4 几种常见水锤工况初始条件

4.1 动力失效

$$\beta_n = 0, \text{ 管路摩擦损失 } h_f = \frac{fL}{D} \frac{v_0^2}{2gH_R} = 0, \text{ 阀门压}$$

$$\text{力损失 } h_v = \frac{v_0^2}{2gH_R} = 0,$$

对泵而言, 有 $\frac{dr}{dt} = \frac{\beta}{t_m}$

对液柱, 有 $\frac{d\mathcal{Y}}{dt} = \frac{h - h_s}{t_f}$

其中静水头 $h_s = \frac{H_s}{H_R}$, 时间 $t_f = \frac{v_0 L}{gH_R}$

故 $\frac{d\mathcal{Y}}{dr} = \frac{h - h_s}{t_f} \frac{t_m}{\beta}$

式中 $t_m = \frac{\eta_k I \omega_k^2}{\rho_g Q_R H_R}$

4.2 泵的启动

加速时有

$$\frac{t_r}{t_m} = \frac{r}{\beta_n - \beta_0} \frac{dr}{r^2}$$

若 $\Delta\beta = \beta_n - \beta = \text{const}$

则 $t_r = \frac{r t_m}{\beta_n - \beta} = \frac{r \eta_k W R^2 \omega_k^2}{\rho_g^2 \Delta\beta Q_R H_R}$

5 计算实例

某抽水站有 3 台同型号离心泵 ($N_s = 151$) 并联工作(水泵额定参数: $n_R = 1760 \text{ r/min}, Q_R = 0.304 \text{ m}^3/\text{s}, H_R = 67 \text{ m}, \eta = 85\%$), 吸水管长度忽略不计, 压水管长度 $L = 1200 \text{ m}$, 吸水池水面高程 $\nabla_0 = 0$, 净扬程 $H_s = 67 \text{ m}$, 压力管直径 $D = 0.813 \text{ m}$, 管内波速 $a = 860 \text{ m/s}$, 不计摩擦阻力和局部阻力, 试求动力突然失效后的压力管路中水锤压力(本例图解法取自文献[4])。

(1) 选取相近 N_s 的全面特性图

这里我们选取 $N_s = 127$, 变换图见图 3。

(2) 计算泵的额定转矩

$$T_R = \frac{\rho_g Q_R H_R}{\omega_k \eta} = \frac{60 \rho_g Q_R H_R}{2\pi n_R \eta} = 1283.9 \text{ N} \cdot \text{m}$$

(3) 初始条件

$$\beta_m = 0, \quad h_f = 0, \quad h_v = 0,$$

$$\frac{dY}{dt} = \frac{h - h_s}{t_f}, \quad \frac{dY}{dr} = \frac{h - h_s}{t_f} \frac{t_m}{\beta}$$

(4) 分段计算

取每段 $\Delta L = 200 \text{ m}$, 相应计算时段 $\Delta t = \Delta L / a$

$$= 0.23256 \text{ s}$$

(5) 计算结果

计算结果与图解结果比较见表 1。

表 1 两种解法比较

状态	电算法	图解法
泵发生最低压力时刻/s	2.78	2.8
泵处最低压力水头/m	8.5	5.3
泵处最高压力时刻/s	14.0	13.0
泵处最高压力水头/m	96	107
流量为零时刻/s	4.3	4.3
最大逆流量/ $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	0.96	0.92
转速为零时刻/s	8.1	7.7
最大逆转速/ $\text{r} \cdot \text{min}^{-1}$	2 430	2 640

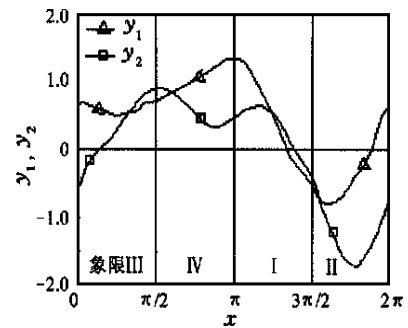


图 3 $N_s = 127$ 离心泵麦切尔曲线

6 结束语

水锤数值计算是计算流体力学的一个分支, 其应用范围很广泛, 如血液流、环保工程和长距离输水输油工程等。然而, 由于各自边界条件及初始条件的不同, 尚有大量工作要做, 数值计算与实验结果比较还有待进一步研究。

参 考 文 献

- 1 (波兰)A T 特罗斯科斯基 著 叶片泵计算与结构 耿惠彬 译 北京: 机械工业出版社, 1981
- 2 罗志昌 流体网络理论 北京: 机械工业出版社, 1988
- 3 (日)秋元德三 著 水击与压力脉动 支培法, 徐关泉, 严亚芳 等译 北京: 电力工业出版社, 1982
- 4 金锥 等 停泵水锤及其防护 北京: 中国建筑工业出版社, 1993
- 5 郑铭 水泵管路系统流动瞬变现象研究 江苏理工大学学报流体专辑, 1995 105~ 112
- 6 郑铭 气液两相瞬变流的数值计算及实验研究 中国工程热物理学会年会会议论文集, 1999 11: 992066
- 7 郑铭 两相流流动瞬变计算方法及实验研究 江苏理工大学学报, 1999, 20(1): 35~ 40
- 8 郑铭 泵的全特性曲线在流动瞬变中的应用 排灌机械, 1997(3): 30~ 35